

ЭРГОДИЧНОСТЬ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Носов В.В., Лукин В.П., Носов Е.В., Торгаев А.В.

Институт оптики атмосферы им. В.Е. Зуева СО РАН, Томск, РФ

e-mail: nosov@iao.ru, lukin@iao.ru, nev@iao.ru, torgaev@iao.ru

Доказана эргодическая теорема для случая нестационарных случайных процессов. Для стационарных процессов такая теорема доказана Тейлором (1921). Этот результат важен для турбулентности в атмосфере, в которой все гидродинамические элементы нестационарны и имеют выраженный суточный и годовой ход. Доказательство подтверждает представления Рейнольдса (1894), согласно которым интервал временного осреднения должен быть велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но мал по сравнению с периодами осредненного поля.

Вследствие чрезвычайной сложности индивидуального описания полей скорости, давления, температуры и других характеристик развитых турбулентных течений еще в конце 19 века было установлено, что при изучении турбулентности необходимо использовать какие-либо методы осреднения, позволяющие перейти от исходных гидродинамических полей к более плавным и регулярным средним значениям характеристик потока, которые можно исследовать с помощью обычных методов математического анализа [1].

На практике при определении среднего значения чаще всего пользуются временным осреднением по какому-либо промежутку времени. О. Рейнольдс [2] (1894 г.) указал общие условия, которым должно удовлетворять любое осреднение, применяемое в гидродинамике. В настоящее время эти условия обычно называются условиями Рейнольдса. Интервал осреднения можно выбрать так, чтобы условия Рейнольдса приближенно выполнялись со сравнительно большой степенью точности [2]. Для этого надо только, чтобы интервал осреднения был велик по сравнению с характерными периодами пульсационного поля, но был мал по сравнению с периодами осредненного поля. Наиболее последовательное использование представления о том, что среднее значение и пульсация функции отличаются в первую очередь характерными периодами, состоит в определении среднего значения как части разложения функции в интеграл Фурье, отвечающей интегрированию по области значений соответствующей переменной (частоты), меньших по абсолютной величине некоторого фиксированного числа ω_m [1, 2]. Такой подход, основанный на представлениях Рейнольдса, позволил доказать эргодическую теорему для случая нестационарных случайных процессов. Для стационарных процессов такая теорема доказана Тейлором [3] (1921) (см. также [4] (1938)).

Пусть $u(t)$ есть случайная функция (случайный процесс, t – время), для которой мы хотим получить статистическое среднее $\langle u(t) \rangle$ путем осреднения по времени, обычным для практики.

Определим среднее по времени $\overline{u(t)}$ от случайной функции u за интервал осреднения T

$$\overline{u(t)} = \frac{1}{T} \int_0^T d\tau u(t-\tau).$$

Вычислим средний квадрат разности между средним по времени и средним по ансамблю

$$\sigma^2 = \langle [\overline{u(t)} - \langle u(t) \rangle]^2 \rangle.$$

Эта формула является основной при доказательстве эргодической теоремы. Если мы установим условия, при которых дисперсия σ^2 сходится к нулю, то из такой среднеквадратичной сходимости вытекает сходимость по вероятности [1]. Таким образом, основная формула дает оценку скорости сходимости средних по времени к среднему по ансамблю.

Согласно Рейнольдсу, случайную функцию u можно представить в виде суммы статистического среднего $\langle u \rangle$ и флуктуаций (пульсаций) u' , имеющих нулевое среднее, $u = \langle u \rangle + u'$, $\langle u' \rangle = 0$. Подставим это определение в основную формулу, тогда

$$\sigma^2 = \langle [A_T(t) + \overline{u'(t)}]^2 \rangle, \quad A_T(t) = \overline{\langle u(t) \rangle} - \langle u(t) \rangle.$$

Здесь уже величина $A_T(t)$ не случайная (детерминированная), и в отличие от стационарных процессов (когда $\langle u \rangle = \text{const}$, $A_T = 0$) уже не равна тождественно нулю. Тогда отсюда находим

$$\sigma^2 = A_T^2(t) + \langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle.$$

Исследуем вначале функцию $A_T(t)$. Для этого перейдем в частотную область изменения статистического среднего $\langle u(t) \rangle$ с помощью преобразования Фурье. Согласно представлениям Рейнольдса спектр среднего значения $w(\omega)$ не равен нулю (локализован) только в области изменения аргумента, где $|\omega| \leq \omega_M$. Как показывают экспериментальные данные, такой спектр может быть аппроксимирован гауссоидой с характерным масштабом убывания ω_M . Частоту ω_M можно назвать характерной частотой изменения статистического среднего значения $\langle u(t) \rangle$ (или максимальной частотой статистического среднего). Она является верхней (положительной) границей диапазона $|\omega| \leq \omega_M$. Максимальной частоте ω_M можно поставить в соответствие временной период T_M ($\omega_M = 2\pi/T_M$) и назвать его минимальным периодом статистического среднего. В частотной области временное осреднение сводится к частотному фильтру $F_T(\omega)$, подавляющему высокие частоты, большие чем частота осреднения $\omega_T = 2\pi/T$ (где T - интервал осреднения). Для фильтра $F_T(\omega)$ тоже можно применить гауссову аппроксимацию с характерным масштабом убывания ω_T .

Оценки скорости сходимости к нулю величины $A_T(t)$ показывают, что этого необходимо выполнение условия $\omega_T \gg \omega_M$ (или $T_M \gg T$). Кроме того, необходимо наложить ограничения на длину реализации. Время t как аргумент случайной функции $u(t)$, условно говоря, задает «длину» функции $u(t)$. Если фиксировать начало оси времени $t = 0$ и некоторый положительный момент времени $t = t_R$, и не интересоваться временами большими, чем t_R , то интервал $(0, t_R)$

называется длиной случайной выборки. Этот интервал (а чаще, просто значение t_R) называется также длиной реализации. Длина реализации обычно определяется задачами и техническими возможностями экспериментатора. В существующей экспериментальной практике длина реализации не бывает большой. Сама процедура проведения эксперимента обычно опирается на имеющиеся теоретические представления об изучаемом физическом процессе [1, 5, 6, 7]. Такие представления позволяют условно разделить изучаемый процесс на регулярную «среднюю» (медленную) и «случайную» (быструю) составляющие. Граница между этими составляющими и дает оценку величины T_M . После продолжительных экспериментальных исследований значение T_M уточняется. В настоящее время [1, 5, 6, 7] в теории атмосферной турбулентности величина T_M оценивается в несколько минут (обычно 3 - 5), а в метеорологии - в десятки минут (обычно 20). При этом типичные эксперименты проводятся на длине «случайной» составляющей, временные периоды которой меньше, чем T_M . Следовательно, в типичных случаях длина реализации t_R не превышает значения T_M (т.е. $t_R \lesssim T_M$).

Высказанные соображения о реальной длине реализации подтверждают взгляды современной теории турбулентности на нестационарные случайные процессы как локально стационарные (для пространственных случайных полей – как локально однородные). Если время внутри одной реализации t не превышает минимальный период статистического среднего T_M (точнее $t < T_M / \pi$), то $\langle u(t) \rangle \approx \langle u \rangle = \text{const}$. Это и означает, что внутри такой реализации приближенно наблюдается режим стационарного случайного процесса.

Исследуем теперь величину $\langle [u'(t)]^2 \rangle$ в основной формуле. Корреляционная функция нестационарного действительного процесса $u(t)$, в отличие от стационарных процессов, зависит не только от разности точек t_1, t_2 , но и от каждой точки отдельно

$$B_u(t_1, t_2) = \langle [u(t_1) - \langle u(t_1) \rangle] [u(t_2) - \langle u(t_2) \rangle] \rangle = \langle u'(t_1) u'(t_2) \rangle.$$

По известной корреляционной функции B_u стандартным образом определяется коэффициент корреляции b_u случайной функции $u(t)$: $b_u(t_1, t_2) = B_u(t_1, t_2) B_u^{-1/2}(t_1, t_1) B_u^{-1/2}(t_2, t_2)$. Так как корреляционная функция $B_u(t_1, t_1)$ в совпадающих точках ($t_2 = t_1$) равна дисперсии $\sigma_u^2(t_1)$ функции $u(t)$, то $B_u(t_1, t_2) = \sigma_u(t_1) \sigma_u(t_2) b_u(t_1, t_2)$. Введем также время корреляции $\tau_K(t)$ (обобщенное условие Тейлора [3]), применяя медленную t и быструю τ переменные [7],

$$\tau_K(t) = \int_0^{\infty} d\tau b_u(t, \tau) < \infty.$$

Характерным периодом пульсаций $u'(t)$ служит время корреляции τ_K случайной функции $u(t)$. Соответствующую времени τ_K частоту ω_K ($\omega_K = 2\pi / \tau_K$) можно назвать частотой корреляции.

Расчеты скорости сходимости к нулю величины $\langle [\overline{u'(t)}]^2 \rangle$ показывают, что этого необходимо выполнение условия $\omega_T \ll \omega_K$ (или $T \gg \tau_K$).

Оценки величины времени корреляции τ_K на практике обычно не вызывают затруднений. Для атмосферы (температура и продольная скорость) они приведены в нескольких опубликованных работах авторов настоящей статьи. Так, например, в типичных условиях (безразличная стратификация) величина τ_K не превышает 10 - 15 с. В отдельных редких случаях (сильно неустойчивая или сильно устойчивая стратификация) она больше, но не превышает 45 - 60 с. Поэтому даже обычное для атмосферной турбулентности двухминутное осреднение (при такой же или большей длине реализации), как правило, позволяет считать неравенство $\tau_K \ll T$ выполненным.

Объединяя максимальные оценки для обоих слагаемых в основном равенстве, получаем

$$\sigma^2 \leq [0,67 \langle u(0) \rangle^2 (T/T_M)^4 + 2 \sigma_u^2(0) \tau_K(0)/T].$$

Эта формула представляет собой содержание эргодической теоремы для нестационарных случайных процессов. Как видно, в соответствии с представлениями Рейнольдса, σ^2 сходится к нулю со сравнительно большой степенью точности, когда $T_M \gg T \gg \tau_K$. В частотной области эти неравенства выглядят как $\omega_M \ll \omega_T \ll \omega_K$. Полагая $T_M \rightarrow \infty$, отсюда получаем эргодическую теорему Тейлора [3, 4, 8].

Исследование выполнено в рамках научной программы Национального центра физики и математики (проект «Физика высоких плотностей энергии. Этап 2023-2025»). Разработка методологии измерений, анализа и расчётов с использованием инфраструктуры ИОА СО РАН выполнена в рамках госзадания ИОА СО РАН.

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т.1. М.: Наука, 1965. 639 с.; Т.2. М.: Наука, 1967, 720 с.
2. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion, *Phil. Trans. Roy. Soc, London*, 1894, Vol.186. P.123—161.
3. Taylor G. I. Diffusion by continuous movements, *Proc. London Math. Soc.*, (2), 1921, Vol.20. P.196—211.
4. Slutsky E. E. (Слуцкий Е. Е.) Sur les fonctions aleatoires presque periodiques et sur la decomposition des fonctions aleatoires stationnaires en composantes, *Actual.Scient. Industr.*, 1938. N 38, P.33—55.
5. Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1967. 548 с.
6. Гурвич А.С., Кон А.И., Миронов В.Л., Хмелевцов С.С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере. М.: Наука, 1976. 277 с.
7. Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть I. Случайные процессы. М.: Наука, 1976. 496 с.
8. Nosov V.V., Lukin V.P., Nosov E.V., Torgaev A.V. Discrete-uninterrupted averaging in Taylor ergodic theorem // *Proc. SPIE*. 2006. Vol. 6160. P. 616034 1-15. doi 10.1117/12.675919.